METODE PENYELESAIAN MASALAH CAUCHY DEGENERATE NONHOMOGEN MELALUI PENYELESAIAN MASALAH CAUCHY NONDEGENERATE NONHOMOGEN

Susilo Hariyanto
Program Studi Matematika Jurusan Matematika FMIPA Universitas Diponegoro
Jln. Prof. H. Soedarto, S.H., Tembalang, Semarang

Abstract. In this article, we investigate how to solve abstract degenerate Cauchy problems nonhomogen via abstract nondegenerate Cauchy problems nonhomogen. The problem are discussed in the Hilbert space $\mathcal{H}$ which can be written as an orthogonal direct sum of *Ker M* and $RanM^*$. Under certain assumptions it is possible to reduce the problems to an equivalent nondegenerate Cauchy problem in the factor space $\mathcal{H}$/Ker M which can be easier to solve. Moreover we defines an operator Z_A which maps the solutions of abstract nondegenerate Cauchy problems nonhomogen to abstract degenerate Cauchy problems nonhomogen

Keywords : Degenerate Chaucy problems, Nondegenerate Chaucy problems

1. PENDAHULUAN

Perhatikan masalah Cauchy abstrak,

$$\frac{d}{dt}Mz(t) = Az(t) + f(t), \quad z(0) = z_0 \qquad (1)$$

dengan operator *M* tidak harus mempunyai invers. Masalah Cauchy abstrak disebut masalah Cauchy abstrak *degenerate* jika *M* tidak mempunyai invers. Masalah Cauchy abstrak disebut masalah Cauchy abstrak *nondegenerate* jika *M* mempunyai invers. Jika $f(t) = 0$, maka disebut masalah Cauchy abstrak homogen. Sebaliknya, jika $f(t) \neq 0$ disebut masalah Cauchy abstrak nonhomogen.

Masalah Cauchy abstrak dalam kasus dimensi berhingga telah dibahas secara lengkap beserta contoh dan aplikasinya dalam teori control [2]. Masalah Cauchy dalam kasus dimensi berhingga dapat dibahas dan dipahami secara lengkap, karena dimungkinkan membawa matrik *M* dan *A* dalam (1) ke bentuk normal bersama yang mempunyai penyelesaian tunggal untuk setiap nilai awal yang diberikan. Sedangkan dalam kasus dimensi tak hingga di antaranya dibicarakan oleh [1]. Dalam pembahasannya diasumsikan bahwa operator *M self adjoint* dan *nonnegative*. Selain itu masalah Cauchy dalam ruang ruang Banach juga telah dibahas [6].

Metode faktorisasi untuk menyelesaian masalah Cauchy abstrak *degenerate* homogen melalui penyelesaian masalah Cauchy abstrak *nondegenerate* homogen dengan menggunakan asumsi-asumsi tertentu telah dibahas oleh Susilo (2002). Di antara asumsi-asumsi tersebut adalah diasumsikannya *A*, *M* operator-operator linier tertutup yang terdefinisi *dense*. Ruang Hilbert $\mathcal{H}$ dinyatakan sebagai hasil tambah langsung dari *Ker M* dan $\overline{RanM^*}$. Selain itu juga diasumsikan pembatasan operator *A* pada *Ker M*, yaitu $A \mid KerM : KerM \subset D(A) \to KerM^*$ mempunyai invers. Untuk mengawankan setiap penyelesaian *nondegenerate* ke *degenerate* didefinisikan suatu operator tertentu, sehingga penyelesaian masalah Cauchy abstrak *degenerate* dapat diperoleh dari penyelesaian *nondegenerate*. Metode faktorisasi dan pendekatan solusi masalah Cauchy degenerate dibahas oleh Thaller di tahun 1996 [16,17,18] dengan mengasumsikan operator A_1, A_2 merupakan generator dari semigrup kontinu kuat dibahas oleh Kappel, Pazy [12,14]. Dalam artikel ini akan dibicarakan metode menyelesaikan masalah Cauchy degenerate nonhomogen melalui penyelesaian masalah Cauchy *nondegenerate* nonhomogen.

2. KONSEP DASAR

Dalam menyelesaikan masalah Cauchy abstrak *degenerate* diawali menyelesaikan kasus homogen terlebih dahulu ($f(t) = 0$), yakni:

$$\frac{d}{dt}Mz(t) = Az(t), \qquad z(0) = z_0 \qquad (2)$$

dengan asumsi, definisi, lemme, dan teorema sebagai berikut.

Asumsi 1

Operator A,M tertutup dan terdefinisi secara dense di ruang Hilbert $\mathcal{H}$ dan dipetakan ke ruang Hilbert $\mathcal{K}$.

Karena M operator tertutup, maka $Ker\ M$ merupakan ruang bagian tertutup dari $\mathcal{H}$. Misalkan P proyeksi *orthogonal* pada $Ker\ M$, akibatnya $P^T = 1 - P$ juga merupakan proyeksi *orthogonal* pada $(Ker\ M)^{\perp}$. Karena M tertutup dan terdefinisi *dense* dalam $\mathcal{H}$, maka M^* tertutup dan terdefinisi *dense* dalam $\mathcal{K}$. Untuk selanjutnya misalkan pula Q proyeksi *orthogonal* pada $Ker\ M^*$, akibatnya $Q^T = 1 - Q$ juga merupakan proyeksi *orthogonal* pada $(Ker\ M^*)^{\perp}$. Dengan demikian dapat dituliskan

$P\mathcal{H} = Ker\ M,\ P^T\mathcal{H} = \overline{(Ran\ M^*)}$,

$Q\mathcal{K} = Ker\ M^*$ dan $Q^T\mathcal{K} = \overline{(Ran\ M)}$.

Definisi

Suatu penyelesaian *strict* dari *degenerate Chauchy problem* adalah suatu fungsi $z : [0, \infty) \to H$ sehingga $z(t) \in D(A) \cap D(M)$ untuk semua $t \geq 0$, Mz *continuosly differentiable* dan memenuhi persamaan (2).

Setiap penyelesaian *strict* masalah Cauchy abstrak *degenerate* pasti memenuhi $z(t) \in D_A$ untuk semua $t \geq 0$, dengan

$$D_A = \{\ z(t) \in D(A) \mid Az(t) \in \overline{(Ran\ M)}\ \} \qquad (3)$$

Lemma 1

Dengan asumsi 1 operator $A\,|_{D_A}$ tertutup.

Operator M *injektif* jika dan hanya jika $Ker\ M = \{0\}$. Oleh karena itu agar dimungkinkan mereduksi operator M yang belum tentu mempunyai *invers* ke operator yang mempunyai *invers* terlebih dahulu didefinisikan operator pembatasan dari M pada $(Ker\ M)^{\perp} \cap D(M)$ sebagai $M_r = M\,|_{D(M_r)}$, dengan $D(M_r) = (\ker M)^{\perp} \cap D(M)$.

Operator $M\,|_{D(M_r)} = M_r$ mempunyai *invers* .

Misalkan $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\}$ merupakan bayangan *invers* dari $x(t) \in (Ker\ M)^{\perp}$ terhadap proyeksi P^T yaitu $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} = \{\ x(t) + y(t) \mid y(t) \in Ker\ M\}$, $x(t) \in (Ker\ M)^{\perp}$. Apabila diperhatikan himpunan $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\}$ belum tentu merupakan *singelton*.

Selanjutnya didefinisikan operator A_0 yang merupakan operator pembatas dari operator A pada $(Ker\ M)^{\perp}$ dengan

$A_0\{x(t)\} = A\left\{\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} \cap D_A\right\} \subset \overline{RanM}$,

untuk setiap $x(t) \in D(A_0)$ dengan

$D(A_0)$

$= \left\{\ x(t) \in (KerM)^{\perp} \mid \left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} \cap D_A \neq \phi\right\}$

Operator A_0 bernilai tunggal jika $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\} \cap D_A$ merupakan *singelton.* Disisi lain himpunan $\left(P^T\right)^{-1}\{x(t)\}$ belum tentu merupakan singelton Untuk itu diperlukan Asumsi 2 dan Lemma 2.

Asumsi 2

$PD_A \subset D_A$ dan operator $(QAP)|_{PDA}$ mempunyai invers yang terbatas.

Lemma 2

Dengan Asumsi 1 dan Asumsi 2, maka vektor $z(t) \in \mathcal{H}$ merupakan anggota ruang bagian D_A apabila $z(t) \in D(A), Pz(t) = -(QAP)^{-1}QAP^Tz(t)$.

Menurut lemma 5 setiap $x(t) \in P^T D_A \subset (\ker M)^{\perp}$ menyatakan dengan tunggal $z(t) \in D_A$ sehingga $x(t) = P^T z(t)$ dan

$$z(t) = (1-(QAP)^{-1}QA)\, x(t).$$

Selanjutnya dapat didefinisikan operator Z_A yaitu:

$$Z_A = P^T - (QAP)^{-1}QAP^T.$$

Operator Z_A terdefinisi pada $D(Z_A) \supset P^T D_A$. Pembatasan $Z_A\,|_{P^T D_A}$ adalah $1-(QAP)^{-1}QA$ pada $P^T D_A$ yang merupakan *invers* dari proyeksi $P^T\,|_{D_A}$ dalam arti: $Z_A P^T = 1$ pada D_A dan

$$P^T Z_A = 1,\ \text{pada}\ P^T D_A \qquad (4)$$

Jadi operator A_0 dapat dinyatakan menjadi

$$A_0 = A\, Z_A,\quad \text{pada}\ D(A_0) = P^T D_A \qquad (5)$$

dan untuk setiap $z(t) \in D_A$ diperoleh :
$A_0x(t) = Az(t)$ dengan $x(t) = P^T z(t)$. Karena $Az = Q^T Az$ untuk semua $z \in D_A$, maka operator A_0 dapat ditulis dalam bentuk yang simetrik yaitu

$A_0 = Q^T AP^T - Q^T AP(QAP)^{-1} QAP^T$.

Untuk memfaktorkan A_0 didefinisikan operator $Y_A = Q^T - Q^T AP(QAP)^{-1} Q$. Oleh karena $Y_A AP = 0$, maka $Y_A AP^T = Y_A A$ dan

$A_0 = Y_A A$ pada $D(A_0) = P^T D_A$. (6)

Asumsi 3
Operator A tertutup dan mempunyai *invers* terbatas

Dengan Asumsi 1, ini ekuivalen dengan operator A injektif dengan $Ran\ A = \mathcal{K}$. Hal ini berakibat $A|_{D_A}$ mempunyai *invers* terbatas yaitu $A|_{D_A} : D_A \to Q^T \mathcal{K}$

$(A|_{D_A})^{-1} : Q^T \mathcal{K} \to D_A$

Dengan demikian operator

$$A_0^{-1} = (A Z_A)^{-1} = P^T A^{-1}|_{Q^T K}$$

terbatas dan terdefinisi pada $Q^T \mathcal{K}$.

Lemma 3
Dengan Asumsi 1, 2, dan 3 operator A_0 tertutup pada $D(A_0) = P^T D_A$.
Dengan mengkonstruksikan, untuk semua $z \in D_A$, diperoleh $Az = A_0x$, dengan $x(t) = P^T z(t)$. Lebih lanjut untuk $z \in D(M)$, $Mz = M_r x$, dengan M_r operator mempunyai *invers*. Jadi *degenerate Chauchy problem* (2) dapat direduksi menjadi permasalahan

$$\frac{d}{dt} M_r x(t) = A_0 x(t), \qquad x(t) = P^T z_0 \qquad (7)$$

Bagaimana proses selanjutnya tergantung pada asumsi operator M.

Asumsi 4
$D_A \subset D(M)$ dan memenuhi paling sedikit satu dari pernyataan berikut:
Kasus a. Operator M mempunyai range tertutup.
Kasus b. Operator M mempunyai domain tertutup.

Jika Asumsi 4, Kasus a dipenuhi, dimungkinkan mendefinisikan operator $A_1 = A_0 (M_r)^{-1}$ pada domain alamiah

$D(A_1) = \{y \in Q^{\perp} \mathcal{K} | (M_r)^{-1} y \in D(A_0)\}$
$= M_r P^{\perp} D_A = MD_A$.

Operator A_1 tertutup karena operator ini merupakan komposisi dari operator tertutup A_0 dan operator terbatas $(M_r)^{-1}$. Operator A_1 terdefinisi secara *dense* di ruang Hilbert $\mathcal{K}_0 = \overline{(MD_A)}$

Jika Asumsi 3, Kasus b dipenuhi, maka didefinisikan operator $A_2 = (M_r)^{-1} A_0$. Operator ini tertutup pada

$D(A_2) = \{x \in P^{\perp} D_A | A_0x \in Ran\ M\} = A_0^{-1} Ran\ M$

karena merupakan komposisi dari operator invers terbatas $(M_r)^{-1}$ dengan operator tertutup A_0. Operator A_2 terdefinisi secara *dense* di ruang Hilbert $\mathcal{H}_0 = \overline{(P^{\perp} D_A)}$.

Asumsi 5
Operator A_1 membangun semigrup kontinu kuat di $\mathcal{K}_0$. Operator A_2 membangun semigrup kontinu kuat di $\mathcal{H}_0$.

Teorema 1
Dengan Asumsi 1, 2, 3, 4 dan 5 berakibat pernyataan-pernyataan berikut.
Kasus a. Untuk setiap nilai awal $z_0 \in D_A$ *degenerate Cauchy problem* (2) mempunyai solusi strict tunggal $z(t) = Z_A (M_r)^{-1} e^{A_1 t} Mz_0$.
Kasus b. Untuk setiap awal $z_0 \in A^{-1} Ran\ M$ dengan tunggal solusi *strict* (2) adalah $z(t) = Z_A e^{A_2 t} P^{\perp} z_0$.

3. PEMBAHASAN

Tanpa mengurangi keumuman untuk menyelesaikan masalah Cauchy *degenerate* nonhomogen (1), yakni

$$\frac{d}{dt} Mz(t) = Az(t) + f(t), \qquad z(0) = z_0,$$

dimisalkan nilai $f(t) = 0$. Sehinga permasalahan tereduksi menjadi masalah (2), yang metode penyelesaiaannya telah dibahas secara lengkap dalan konsep dasar .

Asumsi 6
Dengan asumsi 1, 4, 6, 8, 9, dan Teorema 1 dan M_r terbatas dan mempunyai invers terbatas, serta A_0 terdefinisi secara *dense* di $P^T \mathcal{H}$.

Jika $z(t)$ adalah solusi maka menurut (3) dapat disimpulkan $z(t)$ anggota D_A. Dengan sifat dalam persamaan (4), maka $z(t)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $z(t) = Z_A P^T z(t)$. Oleh karena itu dapat disimpulkan bahwa syarat perlu $z(t)$ merupakan solusi dari (1) adalah $z(t) = Z_A P^T z(t) - (QAP)^{-1}Qf(t)$, untuk semua $t \geq 0$. Ini merupakan konsekuensi langsung dari syarat bahwa $Az(t)+f(t) \in Ran\ M$. Sebagai akibatnya, jika masalah (1) dibatasi pada D_A maka

$$\frac{d}{dt} Mz(t)\Big|_{D_A} = Az(t) + f(t)\Big|_{D_A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} M_r x(t) = Q^T \left(Az(t) + f(t)\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} M_r x(t) = Q^T A\left(Pz(t) + P^T z(t)\right) + Q^T f(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} M_r x(t) = Q^T A\left(-P(QAP)^{-1}QAP^T z(t) + P^T z(t)\right) + Q^T f(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} M_r x(t) = Q^T A\left(1 - P(QAP)^{-1}QA\right)P^T z(t) + Q^T f(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} M_r x(t) = \left(Q^T - Q^T AP(QAP)^{-1}Q\right)AP^T z(t) + \left(Q^T - Q^T AP(QAP)^{-1}Q\right)f(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} M_r x(t) = A_0 x(t) + \left(Q^T - Q^T AP(QAP)^{-1}Q\right)f(t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} M_r x(t) = A_0 x(t) + Y_A f(t), \qquad (8)$$

dengan $A_0 = AZ_A = Y_A A$ seperti pada persamaan (5) dan persamaan (6).

Dengan Teorema 1, terdapat dua metode yang ekuivalen dalam menyelesaikan masalah (8) sebagai akibat langsung Asumsi 4 pada konsep dasar. Oleh karena itu masalah terbagi menjadi Kasus a dan Kasus b yang masing-masing dapat ditranformasi ke

$$\frac{d}{dt} y(t) = A_1 y(t) + Y_A f(t) \text{ atau}$$

$$\frac{d}{dt} x(t) = A_2 x(t) + (M_r)^{-1} Y_A f(t), \qquad (9)$$

dengan $A_1 = A_0 (M_r)^{-1}$ dan $A_2 = (M_r)^{-1} A_0$. Karena diasumsikan A^{-1} terbatas (Asumsi 3), dapat didefinisikan $g(t) = P^T A^{-1} f(t)$ yang berakibat persamaan (9) dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{d}{dt} x(t) = A_2 (x(t) + g(t)). \qquad (10)$$

Bukti

$$\begin{aligned} A_2 g(t) &= (M_r)^{-1} A_0 P^T A^{-1} f(t) r \\ &= (M_r)^{-1} AZ_A P^T A^{-1} f(t) \\ &= (M_r)^{-1} Y_A AP^T A^{-1} f(t) \\ &= (M_r)^{-1} Y_A f(t) \end{aligned}$$

Jika $g(t)$ didalam $D(A_2)= P^T D_A$, maka solusi dari persamaan (10) adalah

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A_2 t} P^T z_0 + \int_0^t e^{A_2 (t-s)} A_2 g(s) ds \\ &= e^{A_2 t} P^T z_0 + A_2 \int_0^t e^{A_2 (t-s)} g(s) ds \end{aligned}$$

Adapun solusi dari masalah originalnya adalah

$$z(t) = Z_A x(t) - (QAP)^{-1} Qf(t) \qquad (11)$$

4. PENUTUP

Masalah Cauchy *degenerate nonhomogen* dapat diselesaikan melalui penyelesaian masalah Cauchy *nondegenerate homogen*. Masalah Cauchy *degenerate nonhomogen* (1) dengan asumsi-asumsi tertentu dapat direduksi ke masalah Cauchy nondegenerate nonhomogen (8). Lebih lanjut (8) dapat dibawa ke masalah (10) yang lebih mudah untuk diselesaikan. Selanjutnya dengan operator tertentu Z_A solusi masalah Cauchy abstrak nondegenerate nonhomogen dapat ditranformasi ke solusi masalah Cauchy degenerate nonhomogen.

5. DAFTAR PUSTAKA

[1] Carroll, R.W & Showalter,R.E. (1976), *Singular and Degenerate Cauchy Problems*, Math. Sci. Engrg., Vol. 127, Academic Press, New York-San Fransisco-London.

[2] Dai, L. (1989), *Singular Control Systems*, Lecture Notes in Control and Inform, Sci., Vol.118, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.

[3] Favini, A. (1979), *Laplace Tranform Method for a Class of Degenerate Evolution Problems*, Rend. Mat. Appl. (2) 12

[4] Favini, A. (1980), *Controllability Condition of Linier degenerate Evolution Systems*, Appl. Math. Optim.

[5] Favini, A. (1981), *Abstract Potential Operator and Spectral Method for a Class of Degenerate Evolution Problems*, J. Differential Equations, 39.

[6] Favini, A. (1985), *Degenerate and Singular Evolution Equations in Banach Space*, Math. Ann., 273.

[7] Favini, A., Plazzi, P. (1988), *On Some Abstract Degenerate Problems of Parabolic Type-1 the Linear Case*, Nonlinear Analysis, 12

[8] Favini, A., Plazzi, P. (1989), *On Some Abstract Degenerate Problems of Parabolic Type-2 theNonlinear Case*, Nonlinear Analysis, 13.

[9] Favini, A., Plazzi, P. (1990), *On Some Abstract Degenerate Problems of Parabolic Type-3 Applications to Linear and Nonlinear Problems,* Osaka J. Math. 27.

[10] Favini, A., Yagi, A. (1992), *Space and Time Regularity for Degenerate Evolution Equations*, J. Math. Soc. Japan, 44.

[11] Hernandez M. (2005), *Existence Result For Second-Order Abstract Cauchy Problem With NonLocal Conditions*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol 2005.

[12] Kappel, F. & Schappacher, W. (2000), *Strongly Continuous Semigroups, An Introduction*.

[13] L. Byszewski, V. Lakshmikantham (1991), *Theorem About the Existence and Uniqueness of Solutions of A Semilinear Evolution Nonlocal Abstract Cauchy Problem in A Banach Space*.

[14] Pazy, A. (1983), *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.

[15] Susilo, H & Lina, A. (2002), *Metode Penyelesaian Masalah Cauchy Degenerate Melalui Masalah Cauchy Nondegenerate*, Majalah Teknosains, Vol. 15 No.8, PascaSarjana UGM.

[16] Thaller, B. (1992), *The Dirac Eqution*, Text and Monographs in Physics, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg-New York

[17] Thaller, B. & Thaller, S. (1996), *Factorization of Degenerate Cauchy Problems : The Linear Case*, J. Operator Theory, 121-146.

[18] Thaller, B. & Thaller, S. (1996), *Approximation of Degenerate Cauchy Problems*, SFB F0003 ”Optimierung und Kontrolle” 76, University of Graz.

[19] Weidman, J. (1980), *Linear Operators in Hilbert Spaces*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg- New York